BULLETIN OF THE BRAZILIAN MATHEMATICAL SOCIETY

Bull Braz Math Soc, New Series 36(2), 177-185

Sur les notions de quasi-homogénéité de feuilletages holomorphes endimension deux

David Marín

Abstract. In this note, we recall the different notions of quasi-homogeneity for singular germs of holomorphic foliations in the plane presented in [6]. The classical notion of quasi-homogenity allude to those functions which belong to its own jacobian ideal. Given a foliation in the plane, asking that the equation of the separatrix set is a classical quasi-homogeneous function we obtain a natural generalization in the context of foliations. On the other hand, topological quasi-homogeneity is characterized by the fact that every topologically trivial deformation whose sepatrix family is analytically trivial is an analytically trivial deformation. We give an explicit example of a topological quasi-homogeneous foliation which is not quasi-homogeneous in the sense given above.

Keywords: holomorphic foliation, singularities, quasi-homogeneity, unfolding.

Mathematical subject classification: 57R30, 32G.

1 Introduction

Cette note a été motivée principalement par la lecture de [6] où l'auteur présente et étudie différents notions de quasi-homogénéité pour les germes de feuilletages holomorphes en dimension deux. L'objectif final est donner une classification analytique complète. Or, il y a plusieurs façons d'aborder le problème. Par exemple, on peut considérer un feuilletage donné $\mathcal{F}$ dans une famille holomorphe (une déformation ou un déploiement de $\mathcal{F}$ dont la définition sera rappelée en bref) et se demander sur la dimension du plus grand espace qui contient toutes ces familles à équivalence analytique près (espace versel). Mais aussi, on peut s'intéresser à l'espace de modules analytiques dans la classe de tous les feuilletages topologiquement conjugués à $\mathcal{F}$. Dans [2] nous avons traité ce problème en donnant une réponse précise dans le cas de feuilletages quasi-homogènes. Il est donc naturel d'aborder l'étude du premier cas générique non quasi-homogène. Ceci arrive

Received 23 November 2004.

quand l'ordre d'annulation à l'origine du feuilletage $\mathcal{F}$ est 4. D'après les résultats de [6, 7], l'espace versel des déploiements équisinguliers d'un tel feuilletage est de dimension 3. On espérait montrer que l'espace de modules analytiques aurait aussi dimension trois, dont on savait interpréter géométriquement deux comme étant les positions des séparatrices. C'était en cherchant le troisième module dans le cas de fonctions qu'on a trouvé que en général il n'existait plus (comme dans l'exemple qu'on présente dans cette note). C'est à dire, la position des séparatrices donnent les seuls invariants analytiques continus. Cette conclusion semblait contredire le fait que la fonction présentée n'était pas quasi-homogène. Finalement, on a vu que les différents notions de quasi-homogénéité n'étaient pas équivalents pour cet exemple. D'après les définitions introduites par J.F. Mattei dans [6] il s'agit donc de donner un exemple de feuilletage qui est topologiquement quasi-homogène mais non quasi-homogène au sens des déploiements.

2 Définitions

Soit $\mathcal{F}_\omega$ un germe de feuilletage holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2$ défini par un germe de 1-forme

$$\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy, \quad a, b \in \mathcal{O}, \quad \text{avec } \operatorname{Sing}(\omega) := \{a = b = 0\} = \{0\},$$

où $\mathcal{O}$ dénote l'anneau de germes de fonctions holomorphes sur $(\mathbb{C}^2, 0)$. D'après un résultat de C. Camacho et P. Sad [1] un tel feuilletage admet toujours une *séparatrice*, c'est à dire un germe à l'origine de courbe analytique irréductible invariant. Il peut en admettre une infinité, on dit alors que ω est *dicritique*. Si ce n'est pas le cas, on note $\operatorname{Sep}(\omega)$ le germe de l'union des séparatrices de ω.

Définition 1. *Soit $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ un germe de 1-forme holomorphe non dicritique à l'origine de $\mathbb{C}^2$, $I(\omega) = (a,b) \subset \mathcal{O}$ l'idéal engendré par les germes de fonction holomorphes a, b, et f une équation réduite de* $\operatorname{Sep}(\omega)$. *On dira que ω est* quasi-homogène *si et seulement si $f \in I(\omega)$. On dira qu'une fonction holomorphe réduite f est quasi-homogène si $\omega = df$ est une 1-forme quasi-homogène, i.e. si f appartient à son idéal* jacobien $J(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Une déformation $\omega_t = a_t(x,y)dx + b_t(x,y)dy$ de $\omega = \omega_0$ est le germe de feuilletage holomorphe de *dimension* 1 sur $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^p$ définit par le champ vecteur

$$X = b_t(x,y)\partial_x - a_t(x,y)\partial_y$$

dont le lieu singulier est $\{0\} \times \mathbb{C}^p$. Un déploiement de ω est un germe de feuilletage holomorphe de *codimension* 1 sur $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^p$ définit par une 1-forme

$$\Omega = a(x,y;t)dx + b(x,y;t)dy + \sum_{j=1}^{p} c_j(x,y;t)dt_j$$

qui satisfait la condition d'intégrabilité $\Omega \wedge d\Omega = 0$, telle que $\mathrm{Sing}(\Omega) = \{0\} \times \mathbb{C}^p$ et $\Omega_{|\{t=0\}} = \omega$. À tout déploiement Ω de ω on lui associe naturellement une déformation sous-jacente. Une déformation est dite équiréductible si elle admet une réduction de singularités (par éclatements) *en famille*. Un déploiement est équisingulier si la déformation sous-jacente est équiréductible. On envoie au lecteur à [6] pour préciser ces définitions.

Une équivalence analytique (resp. topologique) entre deux déformations ou déploiements est une conjugaison analytique (resp. topologique) des feuilletages respectifs qui préserve la projection $\pi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^p$. On dira qu'une déformation (resp. un déploiement) est analytiquement ou topologiquement trivial si est équivalente à la déformation (resp. au déploiement) constante.

Soit $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ un germe de fonction holomorphe à l'origine et $\omega = df$. D'après [4], si ω_t est une déformation topologiquement trivial de ω alors pour chaque t le feuilletage $\mathcal{F}_{\omega_t}$ admet une intégrale première holomorphe f_t. En plus, on peut choisir f_t dépendant holomorphiquement de t. Il résulte que la déformation ω_t est sous-jacente au déploiement $\Omega = dF$ donné par le germe de fonction holomorphe $F : (\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times \mathbb{C}^p) \to (\mathbb{C}, 0)$ définie par $F(x, y; t) := f_t(x, y)$. Remarquons que la trivialité topologique (resp. analytique) du déploiement $\Omega = dF$ équivaut à l'existence des germes de homéomorphismes (resp. biholomorphismes)

$$\Phi : (\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times \mathbb{C}^p) \to (\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times \mathbb{C}^p) \quad \text{et} \quad l : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$$

tels que $\Phi(x, y; t) = (\phi_t(x, y); t)$, $\phi_0 = id$ et $F(\phi_t(x, y); t) = l(f(x, y))$. D'autre part, la déformation sous-jacente au déploiement $\Omega = dF$ est topologiquement (resp. analytiquement) trivial s'il existe des germes de homéomorphismes (resp. biholomorphismes)

$$\Phi : (\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times \mathbb{C}^p) \to (\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times \mathbb{C}^p)$$

et

$$L : (\mathbb{C}^{1+p}, \{0\} \times \mathbb{C}^p) \to (\mathbb{C}^{1+p}, \{0\} \times \mathbb{C}^p)$$

tels que $\Phi(x, y; t) = (\phi_t(x, y); t)$, $\phi_0 = id$, $L(z; t) = (l_t(z); t)$ et

$$F(\phi_t(x, y); t) = l_t(f(x, y)).$$

Définition 2 (Mattei). *Soit ω un germe de 1-forme holomorphe à l'origine non dicritique.*

(1) *On dira que ω est* topologiquement quasi-homogène *si et seulement si toute déformation topologiquement triviale ω_t de ω satisfait l'équivalence:*

La déformation ω_t est analytiquement triviale $\Leftrightarrow$ la famille $\mathrm{Sep}(\omega_t)$ *est analytiquement triviale.*

(2) *On dira que* ω *est* d-quasi-homogène *ou* quasi-homogène au sens des déploiements *si et seulement si tout déploiement équisingulier* Ω *de* ω *satisfait l'équivalence:*

Ω *est analytiquement triviale* $\Leftrightarrow$ *la famille* $\mathrm{Sep}(\Omega_t)$ *est analytiquement triviale.*

3 Quelques remarques sur les notions de quasi-homogénéité

Dans la suite Ω dénotera un déploiement d'une 1-forme holomorphe ω et ω_t la déformation sous-jacente à Ω.

(a) Il est bien connu que si le déploiement Ω est équisingulier alors la déformation ω_t est topologiquement triviale. D'autre part, dans [7] est montré la réciproque sous des conditions génériques (notamment, si ω est ce que les auteurs appellent dans [7] *quasi-hyperbolique générique*: c'est à dire une 1-forme non dicritique dont toutes les singularités du feuilletage réduit sont dans le domaine de Poincaré et tel qu'il y a une composante irreductible du diviseur exceptionnel dont le groupe d'holonomie est non résoluble).

(b) Si ω est telle que toute déformation topologiquement triviale est sous-jacente à un déploiement (par exemple si ω est quasi-hyperbolique générique) alors on a l'implication suivante:

$$\omega \text{ d-quasi-homogène} \quad \Longrightarrow \quad \omega \text{ topologiquement quasi-homogène.}$$

(c) Si ω n'admet pas de facteur intégrant holomorphe (i.e. s'il n'existe pas un germe de fonction holomorphe g tel que $d\left(\frac{\omega}{g}\right) = 0$) alors:

$$\omega \text{ topologiquement quasi-homogène} \quad \Longrightarrow \quad \omega \text{ d-quasi-homogène.}$$

(d) Si $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ alors la déformation $\omega_t = xdy + tydx$, $t \in (\mathbb{C}, t_0)$ de $\omega = \omega_{t_0}$ est topologiquement triviale et vérifie que $\mathrm{Sep}(\omega_t) = \mathrm{Sep}(\omega)$. Mais comme le résidu t est un invariant analytique de ω_t on a que cette déformation n'est pas analytiquement triviale, et donc ω n'est pas topologiquement quasi-homogène. Par contre, il est bien connu que tout déploiement équisingulier d'une singularité réduite est analytiquement trivial, d'où résulte que ω est d-quasi-homogène. Cet exemple montre que l'implication de (b) n'est pas vérifiée dans toute généralité.

4 Mise en place des différents notions de quasi-homogénéité

Ainsi, on a vu que les notions de quasi-homogénéité topologique et au sens des déploiements coïncident sous des hypothèses génériques mais en général elles sont différentes. Rappelons que un feuilletage est dit courbe généralisée si toutes les singularités qui apparaissent après sa réduction ont une partie linéaire non-dégénérée. Le résultat suivant de [6] met en place le rapport entre les différentes notions de quasi-homogénéité de ω et aussi de ses séparatrices:

Théorème 3 (Mattei). *Soit ω un germe de courbe généralisée non dicritique et f une équation réduite de $\mathrm{Sep}(\omega)$ alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *ω est quasi-homogène (i.e. $f \in I(\omega)$)*

(2) *ω est d-quasi-homogène*

(3) *df est quasi-homogène (i.e. $f \in J(f)$)*

(4) *df est d-quasi-homogène*

(5) *il existe un système de coordonnées (u, v), des fonctions $g, h \in \mathcal{O}$ avec $g(0,0) \neq 0$ et des nombres entières positifs α, β et d tels que*

$$f = \sum_{\alpha i + \beta j = d} a_{ij} u^i v^j \quad \text{et} \quad g\omega = df + h(u,v)(\beta v du - \alpha u dv).$$

En plus, si ω est quasi-hyperbolique générique alors les conditions (1)-(5) sont équivalents à

(6) *ω est topologiquement quasi-homogène.*

À l'aide d'un exemple explicite, on verra à la section suivante qu'on *ne peut pas* ajouter au théorème une nouvelle assertion équivalente qui dirait:

(7) *df est topologiquement quasi-homogène.*

5 Un exemple explicite

Le résultat que nous proposons est le suivant:

Proposition 4. *Soit $f(x, y) = x^5 + y^5 + x^3y^3$. Alors,*

(i) *la 1-forme df est topologiquement quasi-homogène.*

(ii) *la 1-forme df n'est pas d-quasi-homogène.*

C'est à dire, df vérifie (7) mais pas (4) ni (3) dans le théorème précédent. En particulier $\omega = df$ fournit le contre-exemple qui manquait à la section 3. Sans perdre généralité, on peut se ramener au cas de déformations et déploiements dont l'espace de paramètres est $(\mathbb{C}, 0)$, i.e. avec $p = 1$. Dans la suite, on notera $\widetilde{\mathcal{O}}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur $(\mathbb{C}^3, 0)$.

Lemme 5. *Soit $f \in \mathcal{O}$ un germe de fonction holomorphe et Ω le déploiement de $\omega = df$ défini par la fonction $F(x, y; t) = u_t(x, y) f(x, y)$, où u_t est une unité qui vérifie $u_0 \equiv 1$. Soit $\widetilde{J}$ l'idéal de $\widetilde{\mathcal{O}}$ engendré par $\frac{\partial f_t}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_t}{\partial y}$. Alors Ω est analytiquement trivial si et seulement si $f \frac{\partial u_t}{\partial t} \in \widetilde{J}$.*

Preuve du Lemme 5. Comme $u_0 \equiv 1$, le déploiement Ω est analytiquement trivial si et seulement s'il existe une famille holomorphe ϕ_t de biholomorphismes de $(\mathbb{C}^2, 0)$ telle que

$$f_t \circ \phi_t = f \qquad \text{avec} \qquad \phi_0 = id. \tag{1}$$

D'après la méthode du chemin, voir par exemple [3], la trivialité analytique du déploiement Ω équivaut à trouver un germe de champ vecteur holomorphe sur $\mathbb{C}^3$

$$X = \frac{\partial}{\partial t} - A_t(x, y)\frac{\partial}{\partial x} - B_t(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

tel que $X(f_t) = 0$, car alors le flot ϕ_t de X vérifie (1). Remarquons que la condition $X(f_t) = 0$ s'exprime comme

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = A_t(x, y)\frac{\partial f_t}{\partial x} + B_t(x, y)\frac{\partial f_t}{\partial y}$$

où d'une façon équivalente: $\frac{\partial u_t}{\partial t} f \in \widetilde{J}$. □

Avant de prouver la Proposition 4, faisons quelques remarques sur la fonction f dont l'idéal jacobien est $J = (5x^4 + 3x^2y^3, 5y^4 + 3x^3y^2)$. Le germe à l'origine de la courbe $f^{-1}(0)$ étant topologiquement conjugué aux cinq droites $\{x^5 + y^5 = 0\}$, le nombre de Milnor de f (qui est un invariant topologique) est égal à $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\}/(x^4, y^4) = 16$. En fait, on peut vérifier sans peine qu'une base du quotient $\mathcal{O}/J$ est la suivante:

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, x^2y^2, xy^3, x^3y^2, x^2y^3, x^3y^3, \tag{2}$$

d'où résulte que f n'est pas quasi-homogène (i.e. $f \notin J$) mais $\mathfrak{m} \cdot (f) \subset J$, $\mathfrak{m}$ étant l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}$. En plus, en utilisant la base (2) on peut montrer aisément que

$$A(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathfrak{m}^5 \Longrightarrow A(x, y),\ B(x, y) \in \mathfrak{m}. \tag{3}$$

Preuve de la Proposition 4. Pour montrer la première assertion on considère une déformation ω_t de ω topologiquement triviale dont la famille de séparatrices $\mathrm{Sep}(\omega_t)$ est analytiquement trivial. Quitte à faire un changement analytique de coordonnées on peut supposer que la famille $\mathrm{Sep}(\omega_t)$ est constante. D'après les remarques de la section 2, il existe une famille de germes de fonctions $F_t : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ dépendant analytiquement de t telle que $\omega_t = dF_t$. Comme $\mathrm{Sep}(\omega_t) = \mathrm{Sep}(df) = f^{-1}(0)$ on peut factoriser F_t comme $F_t = U_t f$ où $U_t \in \widetilde{\mathcal{O}}$ est une unité qui vérifie $U_0 \equiv 1$. La remarque clé est que la déformation ω_t est la même que celle qui est sous-jacente au déploiement défini par la fonction $f_t := u_t f$, où $u_t := \frac{U_t}{U_t(0,0)}$. Nous montrerons, à l'aide du lemme 5 que ce dernier déploiement est analytiquement trivial, d'où découlera automatiquement la trivialité de la déformation ω_t. Si on écrit u_t sous la forme

$$u_t(x, y) = \sum_{n \geq 0} g_n(x, y) t^n,$$

on a que $g_0 \equiv 1$, et $g_n \in \mathfrak{m}$ pour tout $n \geq 1$. Il suffit, d'après le lemme 5, de trouver $A_t(x, y) = \sum_{l \geq 0} A_l(x, y) t^l$ et $B_t(x, y) = \sum_{l \geq 0} B_l(x, y) t^l$ appartenant à $\widetilde{\mathcal{O}}$ tels que

$$\left[\sum_{n \geq 0} (n+1) g_{n+1} t^n\right] f = \left[\sum_{l \geq 0} A_l t^l\right]\left[\sum_{k \geq 0} \frac{\partial (g_k f)}{\partial x} t^k\right] + \left[\sum_{l \geq 0} B_l t^l\right]\left[\sum_{k \geq 0} \frac{\partial (g_k f)}{\partial y} t^k\right].$$

En utilisant que $g_0 \equiv 1$, une inspection directe du coefficient de t^n montre l'égalité

$$A_n \frac{\partial f}{\partial x} + B_n \frac{\partial f}{\partial y} = f\left[(n+1) g_{n+1} - \sum_{l=0}^{n-1} \left(A_l \frac{\partial g_{n-l}}{\partial x} + B_l \frac{\partial g_{n-l}}{\partial y}\right)\right] - \sum_{l=0}^{n-1} \left(A_l \frac{\partial f}{\partial x} + B_l \frac{\partial f}{\partial y}\right) g_{n-l} \tag{4}$$

pour tout $n \geq 0$. Montrons par récurrence sur n qu'il existe $A_j, B_j \in \mathfrak{m}$ vérifiant les équations (4) jusqu'au l'ordre n. Pour $n = 0$ l'équation à résoudre est

$$A_0 \frac{\partial f}{\partial x} + B_0 \frac{\partial f}{\partial y} = f g_1.$$

L'existence de $A_0, B_0 \in \mathfrak{m}$ résulte du fait que $fg_1 \in \mathfrak{m}\cdot(f) \subset J \cap \mathfrak{m}^5$ car $g_1 \in \mathfrak{m}$. Supposons maintenant qu'il existe $A_j, B_j \in \mathfrak{m}$ vérifiant (4) jusqu'au ordre $n-1$. Du fait que $A_j, B_j \in \mathfrak{m}$ on en tire que le deuxième terme de (4) appartient aussi à $J \cap \mathfrak{m}^5$, ce qui assure l'existence de $A_n, B_n \in \mathfrak{m}$ d'après (3). De cette façon nous avons prouvé que $\frac{\partial f_t}{\partial t}$ appartient à $\widehat{J} := \widetilde{J} \otimes \widehat{\mathcal{O}}$, le complété formel de $\widetilde{J}$. D'autre part, comme $\frac{\partial f_t}{\partial t}$ est convergent on conclut que $\frac{\partial f_t}{\partial t} \in \widetilde{J}$, grâce à la fidèle platitude de $\widehat{\mathcal{O}}$ sur $\widetilde{\mathcal{O}}$ (voir par exemple [8]).

Pour montrer la deuxième propriété il suffit de trouver un déploiement équisingulier $\Omega = dF$ à séparatrices constantes (i.e. $F(x,y;t) = u_t(x,y)f(x,y)$) qui ne soit pas analytiquement trivial. Il convient de prendre $u_t(x,y) = g(t)$ avec $g'(t) \not\equiv 0$. En effet, de nouveau par le lemme 5, on a que le déploiement Ω est analytiquement trivial si et seulement si $g'(t)f \in \widetilde{J}$. À partir du premier terme non nul de $g'(t)$, de cette dernière condition on en tire que $f \in J$, ce qui est manifestement faux. $\square$

6 Conclusion

Pour finir, nous donnons un déploiement équisingulier e-semi-universel du feuilletage défini par df où $f(x,y) = x^5 + y^5 + x^3y^3$. D'après [5], la dimension de l'espace de paramètres d'un tel déploiement est trois, car l'ordre d'annulation de df est 4. D'autre part, d'après [3], on sait que si $a_1(x,y), \ldots, a_{\mu+1}(x,y)$ est une base du quotient $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}J(f)$ alors le déploiement

$$U(x,y;u_1,\ldots,u_{\mu+1}) = f(x,y) + u_1a_1(x,y) + \cdots + u_{\mu+1}a_{\mu+1}(x,y)$$

est universel dans le sens que n'importe quel déploiement $F(x,y;t)$ de base $(\mathbb{C}^p, 0)$ (non nécessairement équisingulier) s'écrit sous la forme

$$F(x,y;t) = U(\phi_t(x,y); \lambda(t))$$

où $\phi_0 = id$, $\phi_t(0,0) = (0,0)$ et $\lambda : (\mathbb{C}^p,0) \to (\mathbb{C}^{\mu+1},0)$. Dans notre cas $\mu = 16$ et on peut prendre comme $a_1(x,y) = x^2y^3$, $a_2(x,y) = x^3y^2$ et $a_3(x,y) = f(x,y)$ car ses projections sur $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}J$ sont linéairement indépendants. Considérons le déploiement suivant de $f(x,y)$:

$$F(x,y;t_1,t_2,t_3) = (1+t_3)(f(x,y) + t_1x^2y^3 + t_2x^3y^2). \tag{5}$$

Grâce aux résultats de [6] concernant l'équiréductibilité, du fait que la famille de séparatrices $\mathrm{Sep}(dF_t)$ est topologiquement triviale on en tire que le déploiement F est équisingulier. On peut aussi écrire F sous la forme suivante:

$$F(x,y;t_1,t_2,t_3) = f(x,y) + (1+t_3)t_1a_1(x,y) + (1+t_3)t_2a_2(x,y) + t_3a_3(x,y),$$

d'où résulte que $F(x, y; t_1, t_2, t_3) = U(x, y; \lambda(t_1, t_2, t_3))$ avec le changement de base

$$\lambda(t_1, t_2, t_3) = ((1 + t_3)t_1, (1 + t_3)t_2, t_3, 0, \ldots, 0).$$

Comme la différentielle de λ à l'origine est injective, (5) définit un déploiement équisingulier e-semi-universel, voir [5]. Pourtant, le paramètre t_3 est superflu si on ne considère que les déformations équiréductibles de f.

References

[1] César Camacho and Paulo Sad. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Ann. of Math. (2)*, **115**(3): (1982), 579–595.

[2] David Marín. Moduli spaces of germs of holomorphic foliations in the plane. *Comm. Math. Helv.*, **78:** (2003), 518–539.

[3] Jean Martinet. *Singularities of smooth functions and maps*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982. Translated from the French by Carl P. Simon.

[4] J.-F. Mattei and R. Moussu. Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **13**(4): (1980), 469–523.

[5] Jean-François Mattei. Modules de feuilletages holomorphes singuliers. I. Équisingularité. *Invent. Math.*, **103**(2): (1991), 297–325.

[6] Jean-François Mattei. Quasi-homogénéité et équiréductibilité de feuilletages holomorphes en dimension deux. *Astérisque*, (261):xix, 253–276, 2000. Géométrie complexe et systèmes dynamiques (Orsay, 1995).

[7] Jean-François Mattei and Eliane Salem. Complete systems of topological and analytical invariants for a generic foliation of $(\mathbf{C}^2, 0)$. *Math. Res. Lett.*, **4**(1): (1997), 131–141.

[8] Oscar Zariski and Pierre Samuel. *Commutative algebra. Vol. II*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J.-Toronto-London-New York, 1960.

David Marín
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
E-08193 Bellaterra (Barcelona)
SPAIN

E-mail: davidmp@mat.uab.es